

$$4.25. \quad \text{a) } \begin{cases} 6x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.26. \quad \text{a) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 - 6x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.27. \quad \text{a) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.28. \quad \text{a) } \begin{cases} x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.29. \quad \text{a) } \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 - 8x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.30. \quad \text{a) } \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 4x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

4-§. Векторлар устида чизикли амаллар.

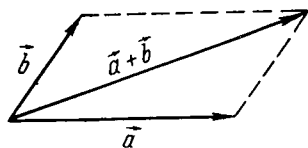
Базис. Базис бўйича ёйиш. Координаталар оркали берилган векторлар устида чизикли амаллар

1.4.1. Боши A нуктада, охири B нуктада бўлган йўналтирилган кесма *вектор* деб аталади ва у $\overrightarrow{AB}$ ёки $\vec{a}$ каби белгиланади. $\vec{a}$ векторнинг узунлиги унинг *модули* деб аталади ва $|\vec{a}|$ каби белгиланади. Охири боши билан устма-уст тушадиган вектор *ноль-вектор* дейилади ва $\vec{0}$ билан белгиланади. Бундай вектор тайин йўналишга эга эмас, унинг модули нолга тенг.

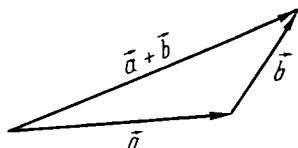
Узунлиги бирга тенг вектор *бирлик вектор* дейилади. $\vec{a}$ векторнинг бирлик вектори $\vec{a}^0$ каби белгиланади.

Бир тўғри чизикда ёки параллел тўғри чизикларда ётувчи векторлар *коллинеар векторлар* дейилади.

Агар икки вектор ўзаро коллинеар, бир хил йўналган ва модуллари тенг бўлса, бу векторлар *тенг векторлар* дейилади.



2- шакл



3- шакл

Бир текисликда ёки параллел текисликларда ётувчи векторларни *компланар векторлар* дейилади.

1.4.2. Векторларни қўшиш, айириш ва векторни сонга кўпайтириш амалларини векторлар устида *чизиқли амаллар* дейилади.

$\vec{a}$ векторнинг λ сонга *кўпайтмаси* деб, $\vec{a}$ векторга коллинеар, $\lambda > 0$ да у билан йўналиши бир хил, $\lambda < 0$ да эса йўналиши қарама-қарши ҳамда модули $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$ га тенг бўлган $\lambda \vec{a}$ (ёки $\vec{a}\lambda$) векторга айтилади.

$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ бирлик вектор бўлиб, у $\vec{a}$ билан бир хил йўналган.

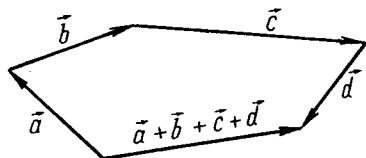
$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг *йиғиндиси* деб $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар билан компланар бўлган $\vec{a} + \vec{b}$ векторга айтилади. Икки векторнинг йиғиндиси параллелограмм (2- шакл) ёки учбурчак (3- шакл) коидалари бўйича топилади.

Бир нечта векторни қўшиш учбурчак коидасини кетма-кет қўллаш билан амалга оширилади. Натижада шу векторларга қўрилган синик чизиқни ёпувчи вектор бир нечта векторларнинг йиғиндиси бўлади (4- шакл).

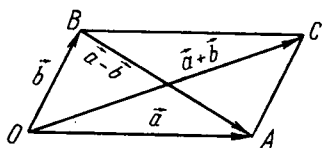
Икки $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторнинг *айирмаси* деб, $\vec{b}$ векторга қўшилганда $\vec{a}$ векторни ҳосил қилувчи $\vec{a} - \vec{b}$ векторга айтилади (5- шакл).

$\vec{a} = \vec{OA}$ ва $\vec{b} = \vec{OB}$ векторларга қўрилган параллелограммнинг OC диагонали $\vec{OC} = \vec{a} + \vec{b}$ га, BA диагонали эса $\vec{BA} = \vec{a} - \vec{b}$ га тенг (6- шакл).

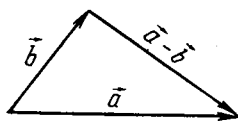
1.4.3. $\vec{a} = \overline{AB}$ векторнинг l ўқ бўйича *ташқил этувчиси* (компоненти) деб, шу вектор боши ва охирининг проекцияларини бирлаштирувчи $\overline{A_1B_1}$ векторга айтилади (7- шакл).



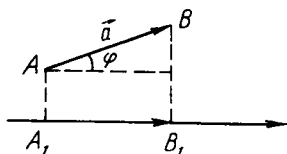
4- шакл



6- шакл



5- шакл



7- шакл

$\vec{a} = \overline{AB}$ векторнинг l ўқдаги проекцияси деб, $\overline{A_1B_1}$ векторнинг йўналиши l ўқ йўналиши билан бир хил ёки бир хил эмаслигига қараб, «+» ёки «-» ишора билан олинadиган ташкил этувчисининг узунлигига айтилади.

$$\text{пр}_l \overline{AB} = \pm |\overline{A_1B_1}|.$$

$\vec{a}$ векторнинг l ўқка проекцияси a_l деб белгиланади, яъни:

$$\text{пр}_l \vec{a} = a_l.$$

Проекцияларнинг асосий хоссалари:

а) $\text{пр}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi$ ёки $a_l = |\vec{a}| \cos \varphi$.

Бунда φ — $\vec{a}$ вектор билан ўқ орасидаги бурчак;

б) $\text{пр}_l (\vec{a} + \vec{b}) = \text{пр}_l \vec{a} + \text{пр}_l \vec{b}$ ёки $\text{пр}_l (\vec{a} + \vec{b}) = a_l + b_l$;

в) $\text{пр}_l \lambda \vec{a} = \lambda \text{пр}_l \vec{a}$ ёки $\text{пр}_l \lambda \vec{a} = \lambda a_l$.

1.4.4. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ векторларнинг чизикли комбинацияси деб

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$$

формула билан аниқланувчи $\vec{a}$ векторга айтилади, бунда $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — тайин сонлар.

Агар $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ векторлар системаси учун камида биттаси нолдан фарқли шундай $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ сонлар мавжуд бўлиб, $\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = 0$ шарт бажарилса, у система *чизикли боғлиқ система* дейилади. Агар юкоридаги тенглик фақат $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ бўлганда ўринли бўлса, $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ векторлар системаси *чизикли эркин* дейилади.

Иккита коллинеар вектор ҳар доим чизикли боғлиқдир. Шунингдек, учта компланар вектор ҳар доим чизикли боғлиқ. Фазодаги ихтиёрий тўрт ёки ундан ортиқ векторлар ҳар доим чизикли боғлиқ.

n та чизикли боғлиқмас векторлар системаси $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ берилган бўлиб, агар ихтиёрий $\vec{a}$ векторни уларнинг чизикли комбинацияси, яъни

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n$$

шаклида ифодалаш мумкин бўлса, у ҳолда берилган система *базис* дейилади.

Бу тенглик $\vec{a}$ векторнинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ базис бўйича *ёйилмаси* дейилади.

Фазода чизикли боғлиқ бўлмаган ҳар қандай учта $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ вектор базис ташкил қилади, шу сабабли фазодаги ҳар қандай $\vec{a}$ вектор шу базис бўйича ёйилиши мумкин:

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3.$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ сонлар $\vec{a}$ векторнинг берилган базисдаги *координаталари* бўлиб, бундай ёзилади:

$$\vec{a} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}.$$

Агар базиснинг векторлари ўзаро перпендикуляр ва бирлик узунликка эга бўлса, бу базис *ортонормалланган базис* дейилиб, у *ортлар* деб аталувчи $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ векторлар орқали белгиланади.

Агар $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ мос равишда OX, OY, OZ ўқлари бўйича йўналган ортлар бўлса, у ҳолда ихтиёрий $\vec{a}$ векторнинг $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ базисдаги ёйилмаси қуйидагича ифодаланади:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \text{ ёки } \vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\},$$

бунда a_x, a_y, a_z — $\vec{a}$ векторнинг координаталари. $\vec{a}$ вектор узунлиги

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

формула бўйича аниқланади.

$\vec{a}$ йўналиши унинг координата ўқлари билан ҳосил қилган α, β, γ бурчаклари билан аниқланади.

$\vec{a}$ векторнинг йўналтирувчи косинуслари

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

формулалар билан аниқланади ва улар

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

муносабат билан боғланган.

1.4.5. $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ ва $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ векторлар берилган бўлсин. У ҳолда

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x) \vec{i} + (a_y \pm b_y) \vec{j} + (a_z \pm b_z) \vec{k},$$

$$\lambda \vec{a} = \lambda a_x \vec{i} + \lambda a_y \vec{j} + \lambda a_z \vec{k}.$$

$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ нукталар берилган бўлсин. У ҳолда $\overrightarrow{M_1 M_2}$ векторнинг ортлар бўйича ёйилмаси

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = (x_2 - x_1) \vec{i} + (y_2 - y_1) \vec{j} + (z_2 - z_1) \vec{k}$$

кўринишда бўлади. M_1 ва M_2 нукталар орасидаги масофа ёки M_1M_2 векторнинг узунлиги

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

формула билан ҳисобланади.

M_1M_2 кесмани берилган λ нисбатда бўлувчи M нуктанинг координаталари қуйидагича аниқланади:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Хусусан, агар $\lambda = 1$ бўлса, M нукта M_1M_2 кесманинг ўртасида ётади ва унинг координаталари

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

муносабатлардан топилади.

М и с о л. $\vec{a} = \{3; 2; -5\}$ ва $\vec{b} = \{2; -3; 1\}$ векторлар берилган. Қуйидагиларни топинг:

а) $2\vec{a} - \vec{b}$ векторнинг координата ўқларидаги проекцияларини;

б) $2\vec{a} - \vec{b}$ векторнинг узунлигини;

в) $2\vec{a} - \vec{b}$ векторнинг йўналтирувчи косинусларини.

Е ч и ш. а) $2\vec{a} - \vec{b} = \{2 \cdot 3 - 2; 2 \cdot 2 - (-3); 2 \cdot (-5) - 1\} = \{4; 7; -11\}$.

б) $|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{4^2 + 7^2 + (-11)^2} = \sqrt{16 + 49 + 121} = \sqrt{186}$.

в) $\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{186}}, \cos \beta = \frac{7}{\sqrt{186}}, \cos \gamma = -\frac{11}{\sqrt{186}}.$

4- дарсхона топшириғи

1. Берилган $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар бўйича уларнинг қуйидаги чизикли комбинацияларини ясанг:

а) $3\vec{a}$; б) $-\frac{1}{2}\vec{b}$; в) $2\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$; г) $\frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$.

2. ABC учбурчакда $\vec{AB} = \vec{m}$ ва $\vec{AC} = \vec{n}$ векторлар берилган. Ушбу векторларни ясанг: а) $\frac{\vec{m} + \vec{n}}{2}$; б) $\frac{\vec{m} - \vec{n}}{2}$; в) $\frac{\vec{n} - \vec{m}}{2}$; г) $-\frac{\vec{m} + \vec{n}}{2}$.

3. ABC учбурчакда AB томони P ва N нукталар билан учта тенг қисмга бўлинган: $|AP| = |PN| = |NB|$. Агар $\vec{CA} = \vec{a}$, $\vec{CB} = \vec{b}$ бўлса, $\vec{CP}$ векторни топинг.

Ж: $\vec{CP} = (2\vec{a} + \vec{b})/3$.

4. Иккита $\vec{a} = \{-1, 2, 3\}$ ва $\vec{b} = \{2, -4, 5\}$ вектор берилган. Куйидаги векторларнинг координата ўқларидаги проекцияларини топинг:

а) $2\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{a} - 3\vec{b}$; в) $3\vec{a} + 5\vec{b}$.

Ж: а) $\{0, 0, 11\}$; б) $\{-7, 14, -12\}$; в) $\{7, -14, 34\}$.

5. $\vec{a} = \{2, 3, 6\}$ векторнинг йўналтирувчи косинусларини топинг.

Ж: $\cos\alpha = \frac{2}{7}$, $\cos\beta = \frac{3}{7}$, $\cos\gamma = \frac{6}{7}$.

6. $\vec{a} = \{2, -3, 6\}$ ва $\vec{b} = \{-1, 2, -2\}$ векторлар ҳосил қилган бурчак биссектрисаси бўйича йўналган $\vec{e}$ бирлик векторнинг координаталарини топинг.

Ж: $\vec{e} = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{42}}, \frac{5}{\sqrt{42}}, \frac{4}{\sqrt{42}} \right\}$.

4- мустақил иш

1. $\vec{a} = \{8, -5, 3\}$ ва $\vec{b} = \{-4, 1, -1\}$ векторларга қурилган параллелограмм диагоналлари узунликларини топинг.

Ж: $|\vec{a} + \vec{b}| = 6$; $|\vec{a} - \vec{b}| = 14$.

2. $A(1, 2, 3)$ ва $B(3, -4, 6)$ нукталар берилган. $\overline{AB}$ вектор узунлигини ва йўналишини топинг.

Ж: $|\overline{AB}| = 7$, $\cos\alpha = \frac{2}{7}$, $\cos\beta = -\frac{6}{7}$, $\cos\gamma = \frac{3}{7}$.

3. $\vec{a} = \{3, 4, -12\}$ векторнинг ортини топинг.

Ж: $\vec{a} = \left\{ \frac{3}{13}, \frac{4}{13}, -\frac{12}{13} \right\}$.

4. ABC учбурчакда $\overline{AB} = \{2, 6, -4\}$ ва $\overline{AC} = \{4, 2, -2\}$ векторлар берилган. C учидан ўтказилган медиана билан устма-уст тушувчи $\overline{CD}$ вектор узунлигини топинг.

Ж: $|\overline{CD}| = \sqrt{10}$.

5- §. Скаляр кўпайтма. Векторнинг узунлиги. Векторлар орасидаги бурчак

1.5.1. Иккита $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторнинг скаляр кўпайтмаси деб, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ кўринишида белгиланувчи ва шу векторлар узунликлари кўпайтмасининг улар орасидаги бурчак косинуси билан кўпайтмасига тенг бўлган сонга айтилади:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Скаляр кўпайтманинг асосий хоссалари:

а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (ўрин алмаштириш қонуни);

б) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (таксимот қонуни);

в) $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$ (гурухлаш қонуни);

г) агар $\vec{a}=\vec{0}$, ёки $\vec{b}=\vec{0}$, ёки $\vec{a}\perp\vec{b}$ бўлса, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ (нолга тенг бўлмаган векторларнинг ортогоналлик шарти);

д) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$ ёки $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$;

е) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$.

1.5.2. Координата ўқлари орталарининг скаляр кўпайтмаси: $\vec{i}^2=\vec{j}^2=\vec{k}^2=1$, $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$, $\vec{i}\cdot\vec{k}=0$, $\vec{j}\cdot\vec{k}=0$. $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ ва $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ векторлар берилган бўлсин. У ҳолда:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_yb_y+a_zb_z;$$

$$\vec{a}^2=|\vec{a}|^2=a_x^2+a_y^2+a_z^2.$$

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орасидаги φ бурчак ушбу формула бўйича ҳисобланади:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг перпендикулярлик шарти:

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ ёки $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

1.5.3. $\vec{F}$ куч жисми $\vec{l}$ вектор йўналишда $\overline{BC}$ масофага кўчириш натижасида бажарган иш ушбу формула билан ҳисобланади:

$$A = \vec{F} \cdot \overline{BC} = |\vec{F}| \cdot |\overline{BC}| \cdot \cos\varphi,$$

бунда φ — кўчиш йўналиши $\vec{l}$ ва $\vec{F}$ кучнинг таъсир чизиғи орасидаги бурчак.

Мисол. Агар $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ бўлиб, улар ўзаро 60° ли бурчак ташкил этса, $2\vec{a}-\vec{b}$ ва $2\vec{a}+3\vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг.

Ечиш. $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}+3\vec{b})=2\vec{a}\cdot2\vec{a}+2\vec{a}\cdot3\vec{b}-\vec{b}\cdot2\vec{a}-\vec{b}\cdot3\vec{b}=4\vec{a}\cdot\vec{a}+6\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{b}\cdot\vec{b}=4\vec{a}\cdot\vec{a}+4\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{b}\cdot\vec{b}=4|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|+4|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos60^\circ-3|\vec{b}|\cdot|\vec{b}|=4\cdot2\cdot2+4\cdot2\cdot3\cdot\frac{1}{2}-3\cdot3\cdot3=16+12-27=1.$

5- дарсхона топишиғи

1. Агар $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$ бўлиб, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орасидаги бурчак

$\varphi = \frac{2}{3}\pi$ бўлса, қуйидагиларни ҳисобланг:

а) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; б) $\vec{a}^2$; в) $\vec{b}^2$; г) $(\vec{a}+\vec{b})^2$; д) $(\vec{a}-\vec{b})^2$;

е) $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$.

Ж: а) -6 ; б) 9 ; в) 16 ; г) 13 ; д) 37 ; е) -61 .

2. Агар $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ва $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ векторлар ўзаро $\varphi = 60^\circ$ ли бурчак ҳосил қилиб, $|\vec{a}| = 2$ ва $|\vec{b}| = 4$ бўлса, AOB учбурчакнинг OM медианаси билан $\overrightarrow{OA}$ томони орасидаги θ бурчакни топинг.

$$\text{Ж: } \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{7}}, \theta \approx 41^\circ.$$

3. $\vec{a} = \{m, 3, 4\}$ ва $\vec{b} = \{4, m, -7\}$ векторлар берилган. m нинг қандай қийматида бу векторлар перпендикуляр бўлади?

$$\text{Ж: } m = 4.$$

4. Учбурчакнинг учлари берилган:

$$A(-1, -2, 4), B(-4, -2, 0), C(3, -2, 1).$$

Учбурчакнинг B учидаги ташқи бурчакни ҳисобланг.

$$\text{Ж: } \frac{3\pi}{4}.$$

5. $\vec{F} = \{3, -2, -5\}$ кучнинг қўйилиш нуқтаси тўғри чизик бўйлаб ҳаракат қилиб, $M_1(2, -3, 5)$ ҳолатдан $M_2(3, -2, -1)$ ҳолатга ўтади. Бу кўчишда $\vec{F}$ куч бажарган ишни ҳисобланг.

$$\text{Ж: } A = 31 \text{ иш бирл.}$$

5- мустақил иш

1. Тўртбурчакнинг учлари берилган:

$A(1, -2, 2)$, $B(1, 4, 0)$, $C(-4, 1, 1)$, $D(-5, -5, 3)$. Шу тўртбурчакнинг AC ва BD диагоналлари ўзаро перпендикуляр бўлишини исботланг.

2. $A(-2, 3, -4)$, $B(3, 2, 5)$, $C(1, -1, 2)$, $D(3, 2, -4)$ нуқталар берилган. $\overrightarrow{AB}$ векторнинг $\overrightarrow{CD}$ вектордаги проекциясини ҳисобланг.

$$\text{Ж: } -6\frac{5}{7}.$$

3. Учбурчакнинг учлари берилган:

$$A(1, 2, 1), B(3, -1, 7), C(7, 4, -2).$$

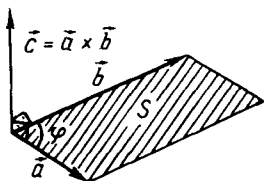
Унинг ички бурчакларини ҳисобланг.

6- §. Векторларнинг вектор ва аралаш кўпайтмалари

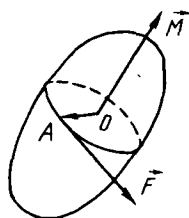
1.6.1. $\vec{a}$ векторнинг $\vec{b}$ векторга вектор кўпайтмаси деб $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ кўринишда белгиланувчи ва қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $\vec{c}$ векторга айтилади:

а) $\vec{c}$ вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга перпендикуляр;

б) $\vec{c}$ вектор учидан қаралганда $\vec{a}$ вектордан $\vec{b}$ векторга энг қиска бурилиш соат мили йўналишига тескари йўналишда



8- шакл



9- шакл

кузатилади ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларнинг бундай жойлашувини ўнг учлик дейилади);

в) $\vec{c}$ векторнинг модули $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга қурилган параллелограммнинг S юзига тенг, яъни $|\vec{c}| = S = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$ (φ — $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орасидаги бурчак) (8- шакл).

Вектор кўпайтманинг асосий хоссалари:

а) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;

б) $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$;

в) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;

г) Агар $\vec{a} = \vec{0}$, ёки $\vec{b} = \vec{0}$, ёки $\vec{a} \parallel \vec{b}$ бўлса, у ҳолда $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Хусусан $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

1.6.2. Координата ўқлари ортларининг вектор кўпайтмаси:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}, \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}, \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}.$$

Агар

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}.$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

бўлса, у ҳолда

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар бўлса, у ҳолда

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

1.6.3. Жисм A нуқтасига қўйилган $\vec{F}$ кучнинг O нуқтага нисбатан $\vec{M}$ моменти (9- шакл)

$$\vec{M} = \vec{OA} \times \vec{F}$$

формула билан ҳисобланади.

10- мисол. $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$ ва $\vec{b}=3\vec{i}+4\vec{k}$ векторларга қурилган параллелограммнинг юзини топинг.

Ечиш. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга қурилган параллелограммнинг S юзи шу векторлар вектор кўпайтмасининг модулига тенг: $S=|\vec{a} \times \vec{b}|$. Вектор кўпайтмани топамиз:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - 8\vec{j} + 9\vec{k}.$$

Демак, $S = \sqrt{(-12)^2 + (-8)^2 + 9^2} = \sqrt{144 + 64 + 81} = 17$ кв. бирлик.

1.6.4. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларнинг *аралаш кўпайтмаси* деб $(\vec{a} \times \vec{b})$ векторнинг $\vec{c}$ векторга скаляр кўпайтмасига айтилади.

Аралаш кўпайтманинг хоссалари:

а) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

Бу хоссадан аралаш кўпайтмани $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ кўринишда белгилаш мумкин эканлиги келиб чиқади.

б) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}$, яъни кўпайтирилувчи векторлар ўринлари доирaviй алмаштирилганда аралаш кўпайтма қиймати ўзгармайди;

в) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$,

яъни қўшни иккита векторларнинг ўринлари алмаштирилганда аралаш кўпайтма ишорасини ўзгартиради;

г) агар векторлардан ақалли биттаси ноль вектор ёки $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар компланар бўлса, у ҳолда $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$ бўлади.

1.6.5. Агар

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k},$$

$$\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$$

бўлса, у ҳолда

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Агар $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ векторлар компланар бўлса, у ҳолда

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

1.6.6. Аралаш кўпайтма кўпайтирилувчи векторларга қурилган параллелопипед ҳажмига ишора аниқлигида тенг, яъни $V = \pm \vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

М и с о л. Учлари $A(1, 2, 0)$, $B(-1, 2, 1)$; $C(0, -3, 2)$ ва $D(1, 0, 1)$ нукталарда бўлган пирамиданинг ҳажмини ҳисобланг.

Е ч и ш. Пирамиданинг A учидан чиққан қирраларига мос келувчи векторларни топамиз:

$$\vec{AB} = \{-2; 0; 1\}, \quad \vec{AC} = \{-1; -5; 2\}, \quad \vec{AD} = \{0; -2; 1\}.$$

Пирамиданинг ҳажми шу векторларга қурилган параллелопипед ҳажмининг $\frac{1}{6}$ қисмига тенг бўлганлиги сабабли

$$V = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 4 = \frac{2}{3} \text{ куб бирлик.}$$

6-дарсхона топшириғи

1. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар ўзаро перпендикуляр бўлиб, $|\vec{a}| = 3$ ва $|\vec{b}| = 4$ бўлса, қуйидагиларни ҳисобланг:

а) $|(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})|$; б) $|(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})|$.

Ж: а) 24; б) 60.

2. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар ўзаро $\varphi = 45^\circ$ ли бурчак ташкил қилиб, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 5$ бўлса, $\vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b}$ ва $\vec{q} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ векторларга қурилган учбурчак юзини ҳисобланг.

Ж: $50\sqrt{2}$ кв. бирлик.

3. $A(2, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$, $C(3, 2, 1)$ нукталар берилган. $\vec{AB} \times \vec{BC}$ ни ҳисобланг.

Ж: $\{6, -4, -6\}$.

4. Учлари $A(7, 3, 4)$, $B(1, 0, 6)$, $C(4, 5, -2)$ нукталардан иборат учбурчак юзини ҳисобланг.

Ж: 24,5 кв. бирлик.

5. $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$, $D(2, 1, 3)$ нукталар бир текисликда ётадими?

6. Қуйидаги векторлар компланарми:

а) $\vec{a} = \{-1, 3, 2\}$, $\vec{b} = \{2, -3, -4\}$, $\vec{c} = \{-3, 12, 6\}$;

б) $\vec{a} = \{3, -2, 1\}$, $\vec{b} = \{2, 1, 2\}$, $\vec{c} = \{3, -1, -2\}$?

Ж: а) компланар; б) нокомпланар.

7. $\vec{a} = \{3, 4, 0\}$, $\vec{b} = \{0, -4, 1\}$, $\vec{c} = \{0, 2, 5\}$ векторлар қандай учлик ташкил этади?

Ж: чап учлик.

8. Пирамиданинг учлари берилган:

$A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$, $D(-5, -4, 8)$.